المراجعة الى هية

لطلبة الثانوية

فى

الجبر والهندسة الفراغية

اولا : نصائح عامة

١) أجعل الصفحة الاولى للمسودة وليس الاخيرة حتى تواجه المصحح أولا لأنها تصحح

٢) بعد المسودة اقلب الصفحة فيكون عندك صفحتين متقابلتين
لحل السؤال الأول موضوعى من سؤالين أختيارى حل سؤال واحد

٣) تحديد السؤال التى ترغب فى إجابته إذا كنت تعرفه كله حتى لاتضيع الوقت

٤) بعد تجهيز ورقتك ابدأ فى قراءة ورقة الاسئلة جيدا وجاوب على السؤال المختار

٥) بعد ذلك كل صفحتين متقابلتين للفقرة (أ) والصفحة المقابلة للفقرة (ب)

٦) الأسئلة والثالث والرابع والخامس أجبارى مطلوب حلهم الثلاثة كلهم

٧) جاوب على الفقرات التى تعرفها اولا ووضعها فى المكان المحدد له

٨) لاتأخذ خط لتقفل إجابة أى فقرة واذا كنت تريد ان تضيف معلومة مباشرة
أحذرك أن تكتب إجابة اخرى فى الورقة ولكن اجعل اجابتك الاخرى أسفل الاجابة الأولى دون أن تشير اجابة اخرى

٩) بعد انتهائك من الفقرات التى حلتها فكر فى الفقرات التى تركتها وأقرأ الفقرة جيدا وأكتب كل ماتعرفه فى تلك الفقرة وما أتراك قد قد يكون صحيحا أفضل مما تركته

١٠) وأخيرا تأكد من أنك جاوبت على كل الفقرات

١١) راجع جيدا ولا تنشغل بأى شئ فالزمن ساعتين فقط

ثانيا : نصائح خاصة

لكل فرع قوانينه اقرأ الفقرة جيدا وافهمها فانه يوجد قانون لحل هذه الفقرة وإن شككت فى القانون وأختلط عليك الأمر فى قانونين ايهما تستخدم اكتب الحلين وبدون فاصل هذا إذ لم تكن متأكد فربما يكون أحدهما صح اما إذا تأكدت من القانون فسير على بركة الله وربنا يوفقكم جميعا

مع أرق امنياتى لكم بالتوفيق والنجاح الباهر

الأستاذ / عادل ادوار

موجه أول رياضيات

الجزء النظرى فى الهندسة الفراغية

* مفاهيم ومسلمات:

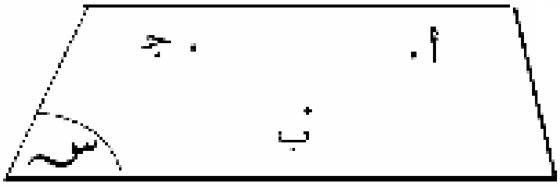
(١) أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد.

(٢) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد.

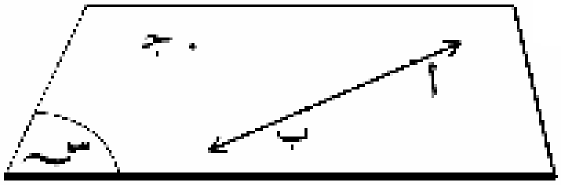
(٣) إذا اشترك مستقيم ومستوى في أكثر من نقطة، فإن المستقيم يقع بأكمله في المستوى.

* تعيين المستوى:

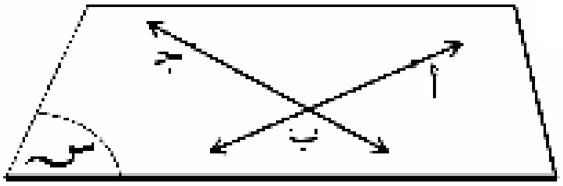
يتعين المستوى بأي من الحالات الآتية:



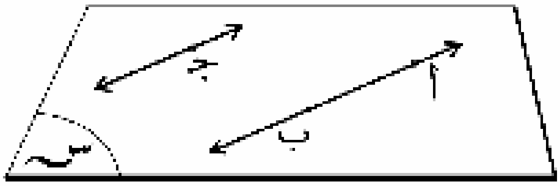
(١) «ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة»



(٢) «مستقيم ونقطة خارجه»



(٣) «مستقيمين متقاطعين»



(٤) «مستقيمين متوازيين»

* الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفراغ:

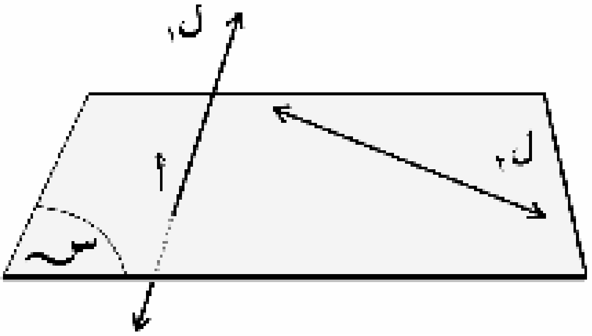
(١) المستقيمان متقاطعان: ... وفي هذه الحالة يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.

(٢) المستقيمان متوازيان: ... وفي هذه الحالة يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.

(٣) المستقيمان متخالفان: .. وفي هذه الحالة لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.

«المستقيمان $ل_1$، $ل_2$ متخالفان»

$ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$ ، $ل_2 \subset \tilde{س}$ ، $ل_1 \cap \tilde{س} = \{أ\}$

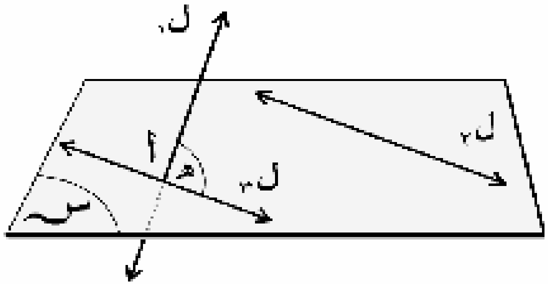


ملاحظة

- إذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$ ويمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن: $ل_1 // ل_2$.
- إذا كان $ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$ ولا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن: $ل_1$، $ل_2$ متخالفان.

*** الزاوية بين مستقيمين متخالفين:**

هي الزاوية بين أحدهما والقاطع له موازيًا الآخر.



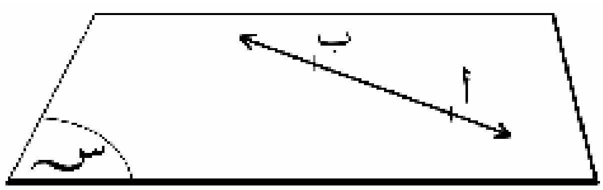
$ل_1$، $ل_2$ متخالفان (غير مستويين)، $ل_2 // ل_3$ (مستويان)، $ل_1 \cap ل_3 = \{أ\}$، لذلك

فإن الزاوية هـ بين $ل_1$، $ل_3$ هي الزاوية بين $ل_1$، $ل_2$.

وإذا كان $ل_1 \perp ل_3$، فإن $ل_1 \perp ل_2$، ويقال عندئذٍ أن $ل_1$، $ل_2$ متخالفان على التعامد.

*** الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفراغ:**

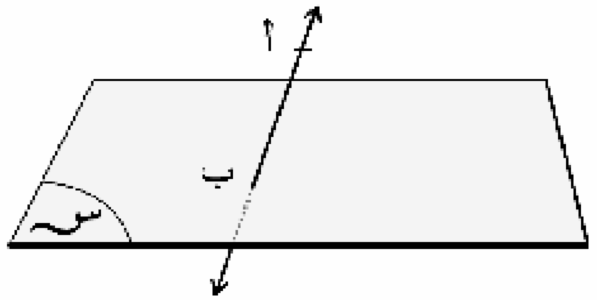
للمستقيم والمستوى في الفراغ ثلاثة أوضاع، هي:



«المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى»

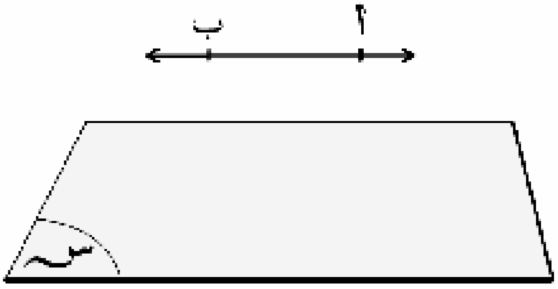
$س \cap \overleftrightarrow{أب} = \overleftrightarrow{أب}$

$\overleftrightarrow{أب} \subset س$



«المستقيم يقطع المستوى في نقطة»

$س \cap \overleftrightarrow{أب} = \{ب\}$

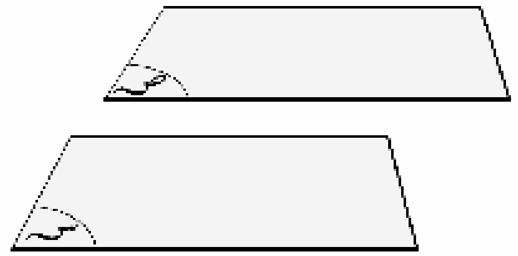


«المستقيم يوازي المستوى»

$س \cap \overleftrightarrow{أب} = \varnothing$ أي $\overleftrightarrow{أب} // س$

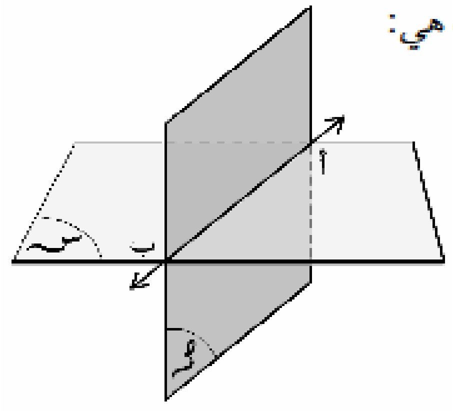
* الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ:

يوجد لمستويين مختلفين ثلاثة أوضاع في الفراغ، هي:



«المستويان متوازيان»

س ∩ ص = ∅ أي س // ص



«المستويان متقاطعان»

س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

«المستويان متطابقان»

س = ص كما يمكننا القول أن س // ص

* توازي مستقيمين:

يقال لمستقيمين مستويين (يجمعهما مستوى واحد) ل$_1$، ل$_2$ أنهما متوازيان إذا كان:

ل$_1$ ∩ ل$_2$ = ∅ أ، ل$_1$ = ل$_2$ أي منطبقان.

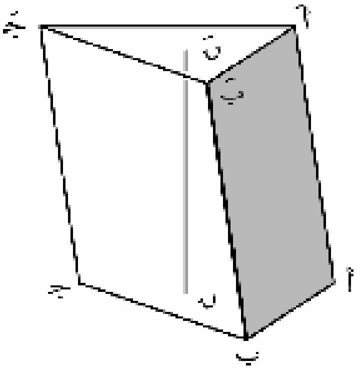
* حقيقة هندسية:

المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان.

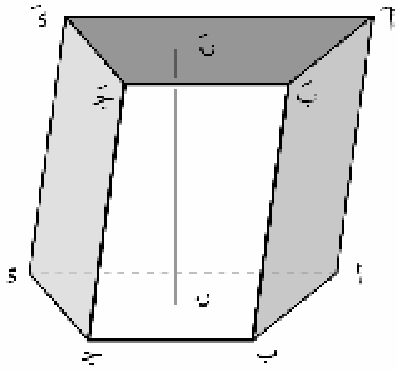
بعض المجسمات الشهيرة:

* المنشور:

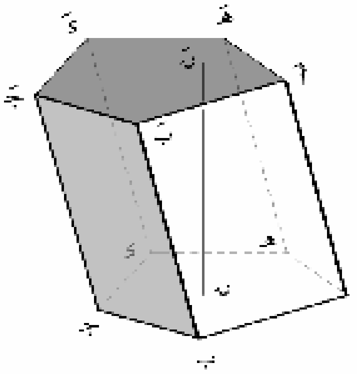
«هو الجسم المتولد من انتقال سطح مضلع موازيًا لنفسه في اتجاه ثابت»



«منشور ثلاثي»



«منشور رباعي»



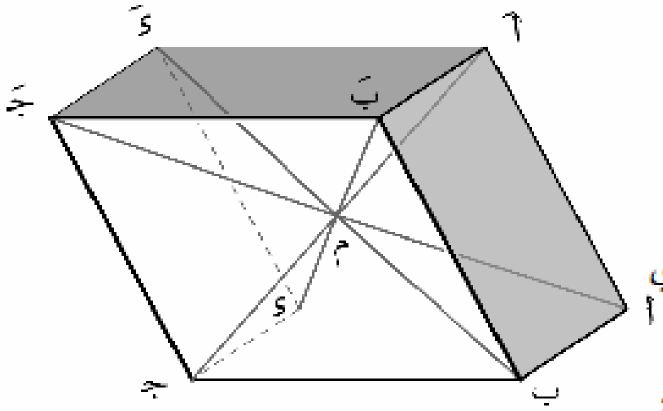
«منشور خماسي»

- يسمى سطح المضلع في وضعه الابتدائي والنهائي بقاعدتي المنشور.
- يقال أن المنشور مائلاً إذا كان الاتجاه الثابت يميل على سطح المضلع.
- يقال أن المنشور قائمًا إذا كان الاتجاه الثابت عمودي على سطح المضلع.

ويلاحظ أن:

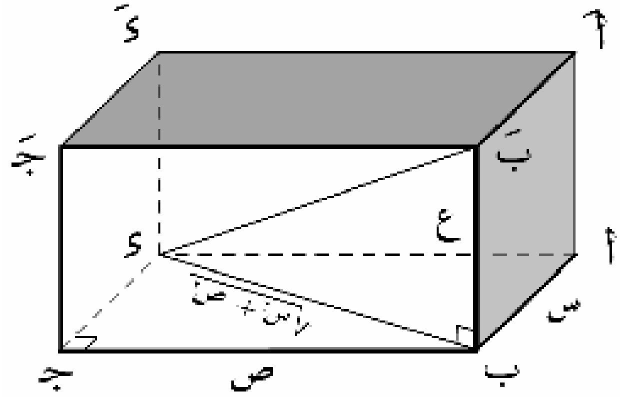
- قاعدتا المنشور متوازيتان ومتطابقتان.
- الأحرف الجانبية للمنشور قطع مستقيمة متوازية ومتساوية في الطول.
- وجه المنشور عبارة عن سطح متوازي الأضلاع.
- وجه المنشور عبارة عن سطح مستطيل إذا كان المنشور قائمًا.
- ارتفاع المنشور يساوي البعد العمودي بين قاعدتيه.

حالات خاصة:



* متوازي السطوح:

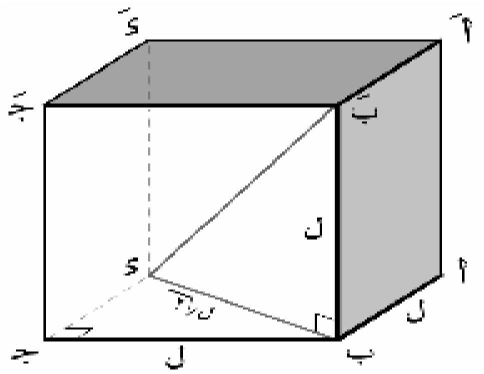
- هو منشور سطح كل من قاعدتيه متوازي الأضلاع.
- قطر متوازي السطوح هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين ليسا في مستوى واحد – وعددها أربعة.
- أقطار متوازي السطوح تتقاطع جميعًا في نقطة واحدة، هي منتصف كل منها.



* متوازي المستطيلات:

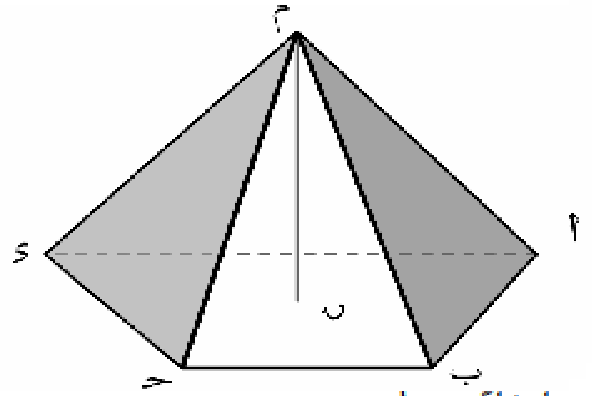
- هو منشور قائم كل من قاعدتيه سطح مستطيل.
- أبعاد متوازي المستطيلات س، ص، ع هي أطوال ثلاثة أحرف متلاقية في رأس واحدة.
- مساحته الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ ع (س + ص)
- مساحته الكلية = ٢ (س ص + ص ع + ع س)
- حجمه = س ص ع
- طول قطره = $\sqrt{س^2 + ص^2 + ع^2}$

❋ المكعب:

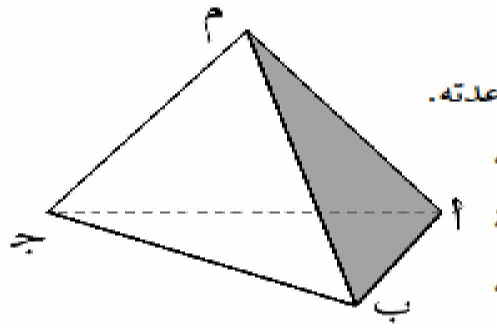


- هو متوازي مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة، طول كل منها ل – مثلاً.
- كل وجه من أوجهه الستة مربع.
- مساحته الجانبية = $٤ ل^{٢}$
- مساحته الكلية = $٦ ل^{٢}$
- حجمه = $ل^{٣}$
- طول قطره = $ل \sqrt{٣}$

❋ الهرم:



- هو اتحاد القطع المستقيمة المرسومة من نقطة خارج مستوى معلوم إلى جميع نقط منطقة مضلعة في المستوى المعلوم.
- يُسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته … ثلاثي .. رباعي … إلخ.
- تُسمى النقطة م رأس الهرم، ويُقرأ الهرم ويُكتب ابتداءً من راسه.
- تُسمى القطع المستقيمة $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ ، $\overline{مجـ}$ ، … الأحرف الجانبية للهرم.

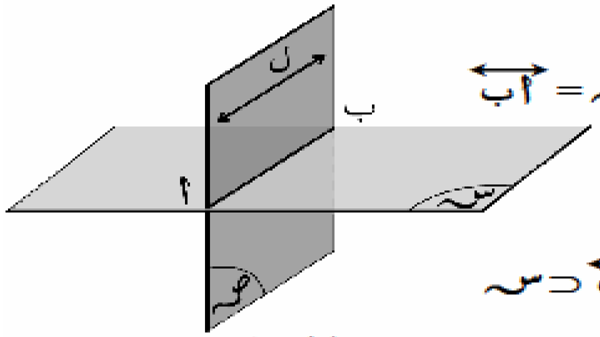


- كل وجه من أوجه الهرم الجانبية عبارة عن مثلث.
- ارتفاع الهرم هو طول العمود النازل من رأسه إلى قاعدته.
- الهرم الثلاثي المنتظم: هو هرم ثلاثي أطوال أحرفه الستة متساوية، ويكون كل وجه من أوجهه الأربعة مثلث متساوي الأضلاع، وارتفاعه يلاقي قاعدته عند مركزها الهندسي (نقطة تلاقي متوسطاتها).

توازي مستقيم ومستوى

❋ نظرية (١): {البرهان مقرر}

«إذا وازى مستقيم مستويًا فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم».



المعطيات: ل // س~ ، ل ⊂ ص~ ، س~ ∩ ص~ = $\overleftrightarrow{أب}$

المطلوب: أثبت أن: ل // $\overleftrightarrow{أب}$

البرهان: ∵ ل // س~ ∴ ل ∩ س~ =

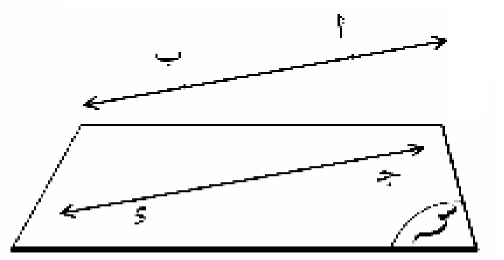
∴ ل ∩ $\overleftrightarrow{أب}$ = لأن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ س~

∵ ل ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ ص~ (يجمعهما مستوى واحد وغير متقاطعين)

∴ ل // $\overleftrightarrow{أب}$

* حقيقة هندسية:

«إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيمًا في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى».



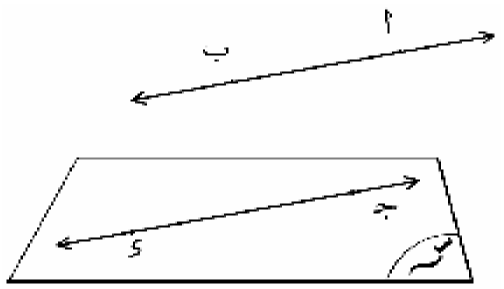
$\overleftrightarrow{\text{أب}} \not\subset$ س ، $\overleftrightarrow{\text{جء}} \subset$ س ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جء}}$

$\therefore \overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel$ س

** نتائج هامة:

نتيجة (١): ** **

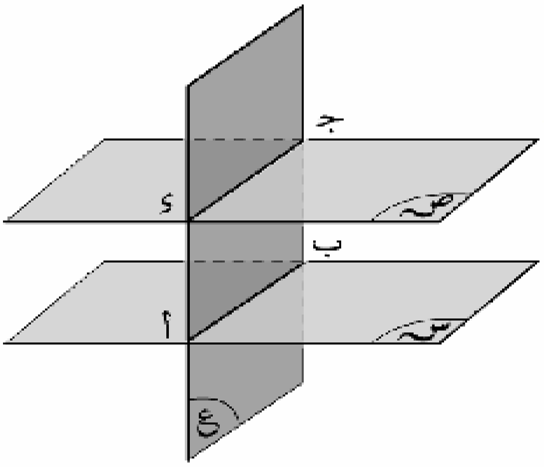
«إذا وازى مستقيم مستويًا، فالمستقيم الذي يمر بأي نقطة من نقط المستوى موازيًا المستقيم المعلوم يقع بأكمله في المستوى».



$\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel$ س ، جـ $\in$ س ، $\overleftrightarrow{\text{جء}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أب}}$ $\therefore \overleftrightarrow{\text{جء}} \subset$ س

نتيجة (٢): ** ** ** ** **

«إذا قطع مستوى كل من مستويين متوازيين فخطًا تقاطعه معهما يكونان متوازيين».

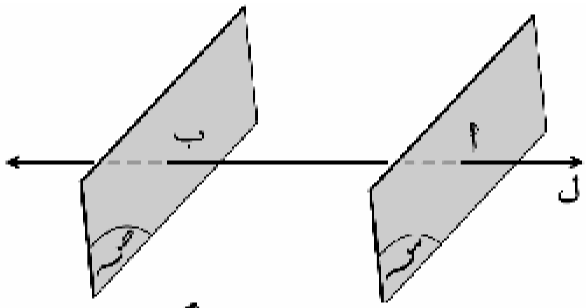


ع $\cap$ س $= \overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، ع $\cap$ ص $= \overleftrightarrow{\text{جء}}$ ،

س $\parallel$ ص $\therefore \overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جء}}$

نتيجة (٣): *

«إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر».

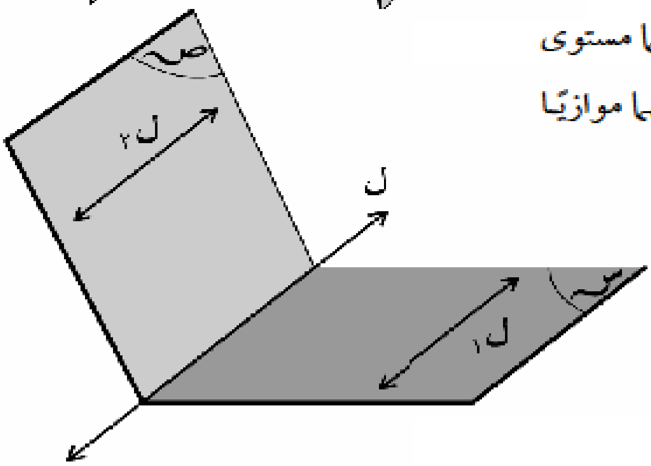


س $\parallel$ ص ، ل $\cap$ س $= \{$أ$\}$

$\therefore$ ل $\cap$ ص $\neq \varnothing$ أي ل $\cap$ ص $= \{$ب$\}$

نتيجة (٤): * ** **

«إذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوى وتقطع المستويان كان خط تقاطعهما موازيًا هذين المستقيمين».



$ل_1 \parallel ل_2$ ، $ل_1 \subset$ س ،

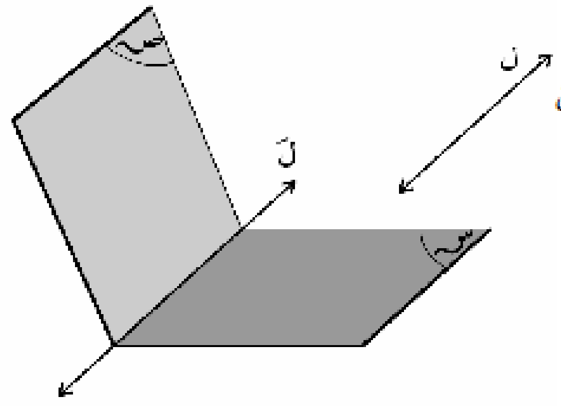
$ل_2 \subset$ ص ، س $\cap$ ص $=$ ل

$\therefore$ ل $\parallel ل_1 \parallel ل_2$

نتيجة (٥):

❋ ❋ ❋

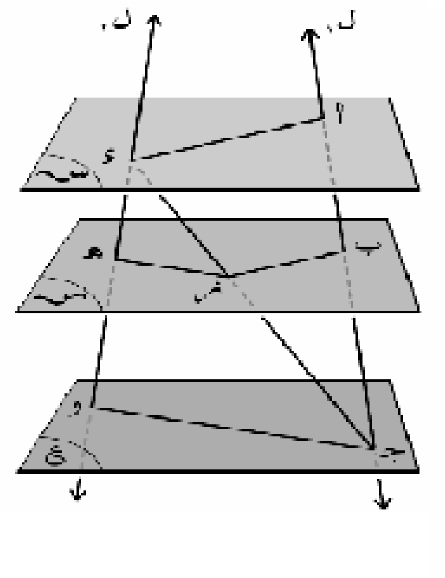
«إذا وازى مستقيم كل من مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما».



ل // س~ ، ل // ص~ ، س~ ∩ ص~ = لَ

∴ ل // لَ

❋ تمرين مشهور:



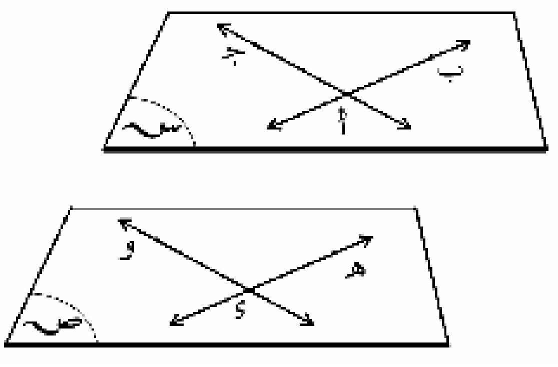
«إذا قُطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين، فإن أطوال القطع المحصورة بينها تكون متناسبة».

س~ // ص~ // ع~ ، ل١ ، ل٢ قاطعين لها:

$$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{هـو}} \Longleftarrow \frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$$

● إذا كان: أب = ب جـ ، فإن: ء هـ = هـ و

نظرية (٢): [بدون برهان]

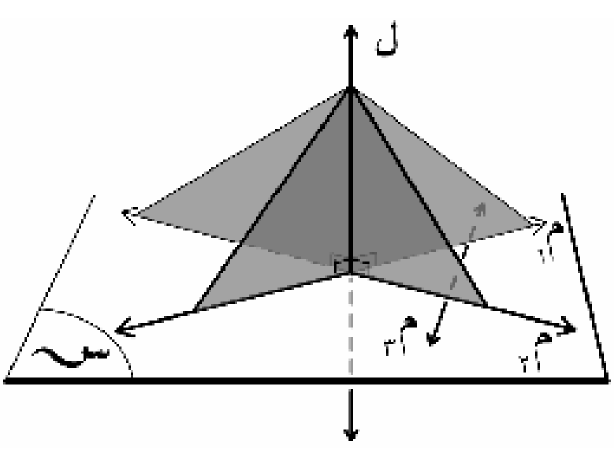


«إذا تقاطع مستقيمان في مستوى وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستوى آخر، فإن المستويين متوازيان».

إذا كان: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ فإن:

س~ // ص~ .

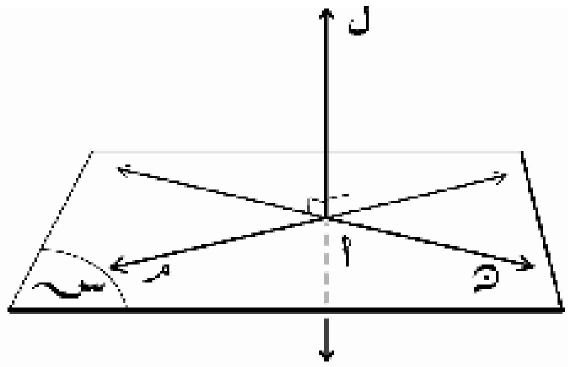
❋ المستقيم العمودي على مستوى:



تعريف:

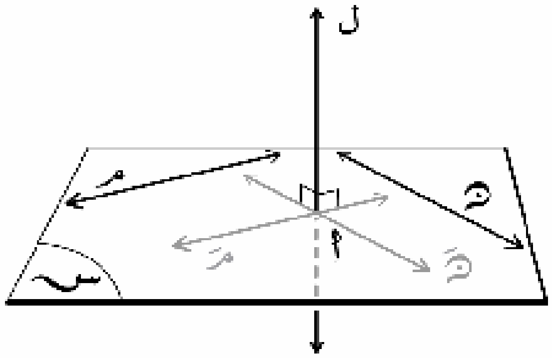
«يقال أن المستقيم ل عموديًا على المستوى س~ إذا كان عموديًا على كل مستقيم في المستوى».

نظرية (٣): [بدون برهان]



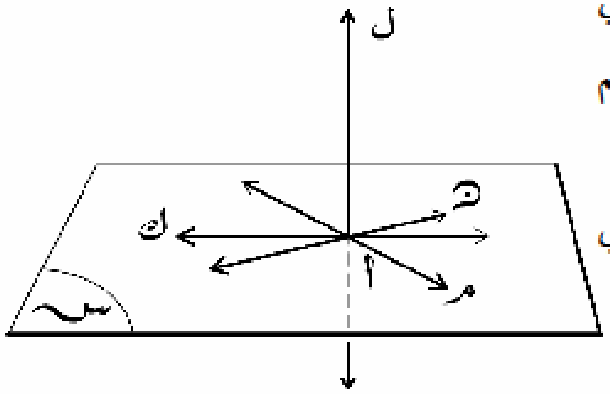
«المستقيم العمودي على كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديًا على مستويهما».

نتائج هامة:



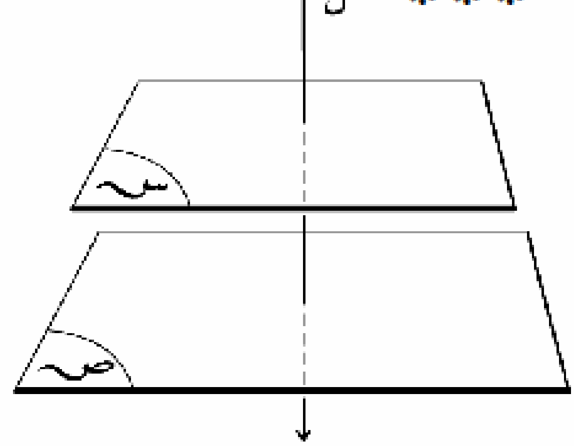
(١) المستقيم العمودي على أي مستقيمين غير متوازيين في مستوى يكون عموديًا على هذا المستوى. ❋❋ ❋❋❋

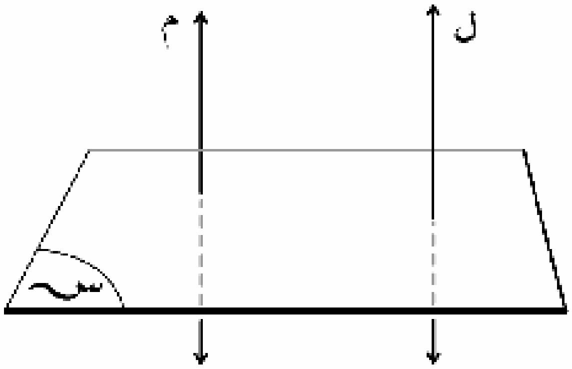
(٢) جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة واحدة عليه تقع في مستوى واحد عمودي على المستقيم المعلوم عند هذه النقطة. ❋



(٣) يوجد مستوى واحد وواحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة عليه. ❋

(٤) المستقيمان العمودان على مستوى واحد متوازيان. ❋❋❋





(٥) إذا كان مستقيمٌ عموديًا على كل من مستويين مختلفين، فإنهما يكونان متوازيين.

كذلك؛ إذا كان مستقيمٌ عموديًا على أحد مستويين متوازيين، فإنه يكون عموديًا على المستوى الآخر. ❋❋❋

ملاحظات:

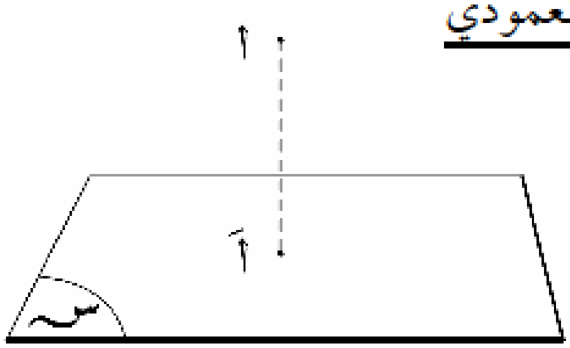
(١) إذا كان س، ص، ع هي أبعاد متوازي المستطيلات، فإن:

طول قطر متوازي المستطيلات = $\sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2}}$

(٢) إذا كان س = ص = ع = ل، فإن متوازي المستطيلات يصبح مكعبًا، ويكون طول قطر المكعب = ل $\sqrt{3}$.

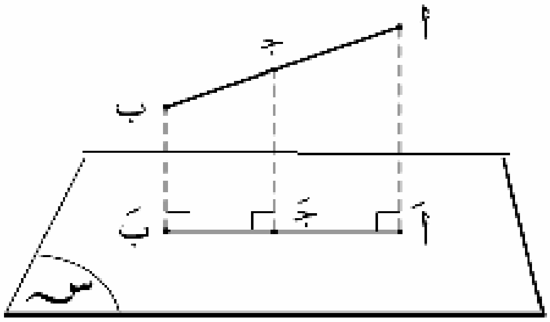
الإسقاط العمودي

(١) مسقط نقطة على مستوى:



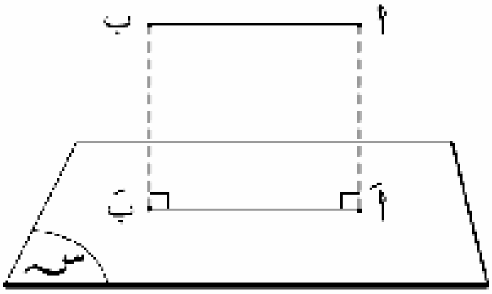
مسقط نقطة معلومة على مستوى هو النقطة من المستوى الناتجة عن تقاطع العمود المرسوم من النقطة المعلومة إلى المستوى.

(٢) مسقط قطعة مستقيمة على مستوى:



مسقط قطعة مستقيمة معلومة على مستوى هو القطعة المستقيمة من المستوى التي تكون كل نقطة من نقطعها مسقطًا عموديًا لإحدى نقط القطعة المستقيمة المعلومة على المستوى.

● العلاقة بين طول قطعة مستقيمة وطول مسقطها على مستوى:



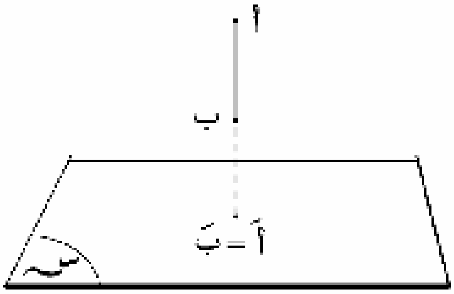
توجد ثلاثة أوضاع مختلفة للقطعة المستقيمة المرسومة خارج مستوى:

الأول: القطعة المستقيمة توازي المستوى:

∵ $\overline{\text{أب}}$ // س

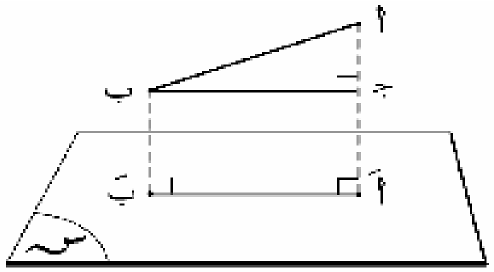
∴ الشكل أ أَ بَ ب مستطيل

∴ أَ بَ = أب



الثاني: القطعة المستقيمة عمودية على المستوى:

أَ بَ = صفر



الثالث: القطعة المستقيمة مائلة على المستوى:

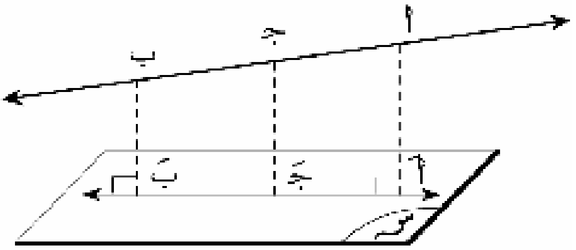
أب ∦ س ، أب ⊥̸ س

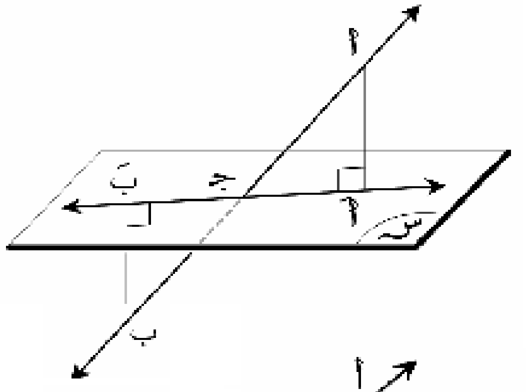
∴ أَبَ ≠ أب ، أَبَ ≠ صفر

∴ صفر < أَبَ < أب

(٣) مسقط مستقيم على مستوى:

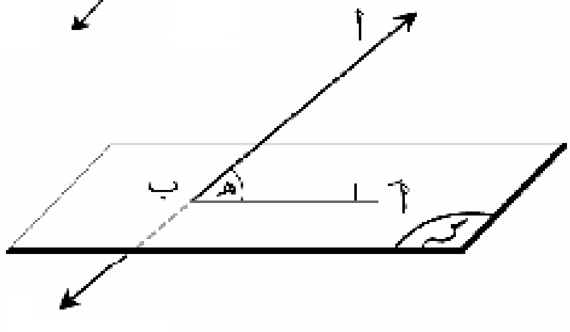
مسقط مستقيم معلوم على مستوى هو المستقيم من المستوى الذي تكون كل نقطة من نقطه مسقطًا عموديًا لإحدى نقط المستقيم المعلوم على المستوى.





- الزاوية بين مستقيم ومستوى:

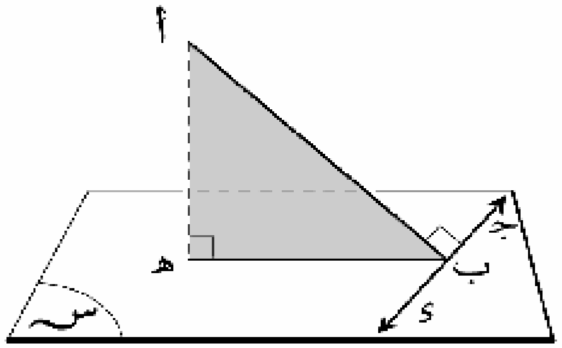
هي الزاوية بين المستقيم ومسقطه في المستوى.



كذلك .. الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستوى، هي الزاوية بين المستقيم الحامل للقطعة المستقيمة وبين المستوى.

❋ نظرية (٤): {البرهان مقرر}

«إذا رُسم مستقيمٌ مائلٌ على مستوى وكان عموديًا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عموديًا على هذا المستقيم».



المعطيات: أب ↔ مائل على المستوى س،

أب ↔ ⊥ جء ↔ ،

جء ↔ ⊂ س، هـب ↔ مسقط

أب ↔ في المستوى س، حيث

هـ مسقط أ.

المطلوب: أثبت أن: هـب ↔ ⊥ جء ↔

البرهان: ∵ هـ مسقط أ في المستوى س

∴ أهـ ↔ ⊥ س ∴ أهـ ↔ ⊥ جء ↔ (لماذا؟)

∵ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ ى}$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{جـ ى} \perp$ المستوى أهـ ب (لماذا؟) ∴ $\overleftrightarrow{هـ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ ى}$

❋ <u>عكس نظرية (٤)</u>: {البرهان مقرر}

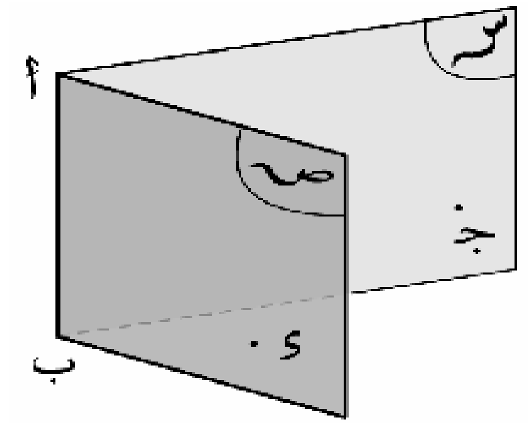
«إذا رُسم مستقيمٌ مائلٌ على مستوى وكان مسقطه على المستوى عموديًا على مستقيم فيه فإن ذلك المستقيم المائل يكون عموديًا على هذا المستقيم».

... يُترك البرهان للطالب

- مما سبق يتبين أنه إذا وُجد في تمرينٍ ما مستقيمٌ مائلٌ على مستوى ومسقطه في المستوى، وكان أحدهما عموديًا على مستقيم في المستوى، كان الآخر عموديًا على نفس المستقيم.

الزاوية الزوجية

(١) <u>تعريف:</u>



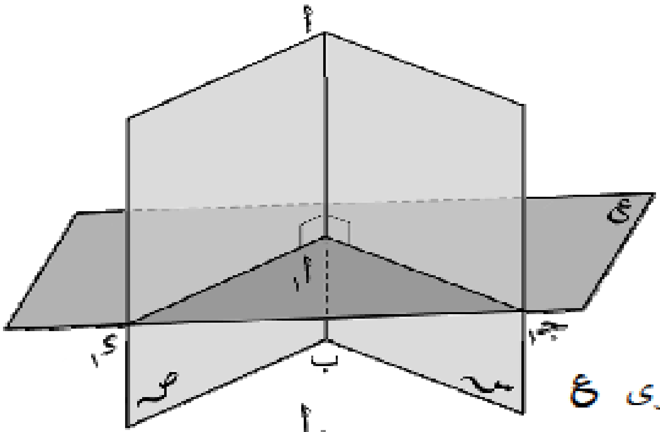
هي اتحاد نصفي مستويين لهما حدٌّ مشترك.

في الشكل المقابل لنصفي المستويين س ، ص حدٌّ مشترك هو $\overleftrightarrow{أب}$ ، لذلك يُسمّى:

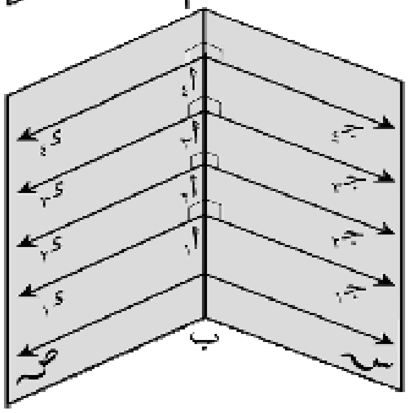
س $\cup$ $\overleftrightarrow{أب}$ $\cup$ ص زاوية زوجية، ويرمز لها بالرمز: $\angle$ (س – $\overleftrightarrow{أب}$ – ص) أو بالرمز:

$\angle$ (جـ – $\overleftrightarrow{أب}$ – ى)، ويعني الزاوية الزوجية التي أحد وجهيها يمر بالنقطة جـ ووجهها الآخر يمر بالنقطة ى وحدُّها $\overleftrightarrow{أب}$.

(٢) <u>الزاوية المستوية للزاوية الزوجية:</u>



هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع أي مستوى عمودي على حرفها (حدّها).



والشكلان المقابلان يوضحان المستوى ع العمودي على $\overleftrightarrow{أب}$ حدّ الزاوية الزوجية $\angle$ (س – $\overleftrightarrow{أب}$ – ص) فقطعها في $جـ_1 \hat{أ}_1 ى_1$،

لذلك تُسمّي $جـ_1 \hat{أ}_1 ى_1$ زاوية مستوية للزاوية الزوجية $\angle$ (س – $\overleftrightarrow{أب}$ – ص)، وكذلك كل من الزوايا $جـ_2 \hat{أ}_2 ى_2$، $جـ_3 \hat{أ}_3 ى_3$، $جـ_4 \hat{أ}_4 ى_4$.

● **لاحظ أن:**

١ – كلاً من ضلعي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية يكون عموديًا على حرفها (حدّها).

٢ – يوجد لكل زاوية زوجية عدد لانهائي من الزوايا المستوية.

(٣) **حقيقة:** جميع الزوايا المستوية للزاوية الزوجية تكون متساوية في القياس.

(٤) **تعريف:** قياس الزاوية الزوجية هو قياس أيٍّ من زواياها المستوية.

● **ملاحظات:** ١ – الزاوية الزوجية القائمة هي زاوية زوجية قياسها 90° .

٢ – كل من المائل ومسقطه في المستوى يكونان زاوية مستوية للزاوية الزوجية حرفها المستقيم الثالث العمودي عليهما ووجهيها يحويانها.

❋ **نظرية (٥):** {البرهان مقرر}

«إذا كان مستقيم عموديًا على مستوى، فكل مستوى يحوي هذا المستقيم يكون عموديًا على ذلك المستوى».

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp$ المستوى س عند جـ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \subset$ ص ، ص $\cap$ س $=$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

المطلوب: أثبت أن: المستوى ص $\perp$ المستوى س .

العمـل: نرسم في المستوى س : $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

البرهـان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp$ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ $\hat{}$ هي زاوية مستوية

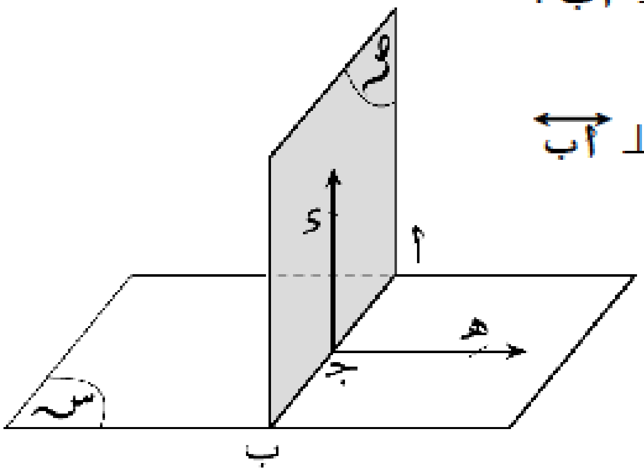
للزاوية الزوجية :

∠(س – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ص)

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp$ س

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp$ ∴ $\hat{}$ قائمة

∴ ∠(س – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ص) قائمة



❋ **نظرية (٦):** { بدون برهان }

«إذا تعامد مستويان ورُسم في أحدهما مستقيمًا عموديًا على خط تقاطعهما، كان هذا المستقيم عموديًا على المستوى الآخر».

❋ **حقيقة:** «إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديًا على مستوى ثالث، كان خط تقاطع هذين المستويين عموديًا على المستوى الثالث».

الهرم القائم

(١) تعريف:

هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

- مركز المثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع متوسطاته.
- مركز المربع هو نقطة تقاطع قطريه.

(٢) خواص الهرم القائم:

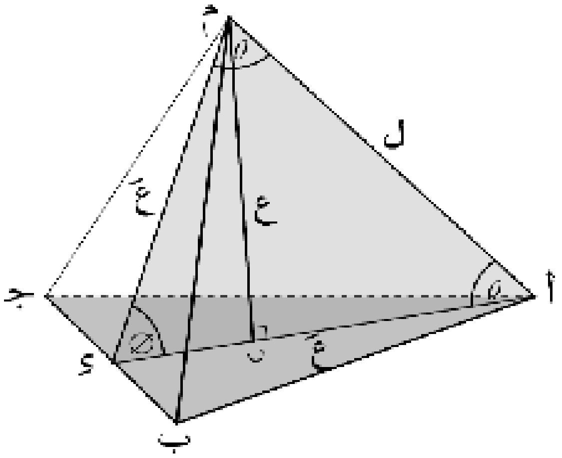
- أحرفه الجانبية متساوية الطول.
- أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.
- ارتفاعاته الجانبية – ارتفاعات أوجهه الجانبية– متساوية الطول.

(٣) الهرم الثلاثي المنتظم:

هو هرم ثلاثي قائم طول حرفه الجانبي يساوي طول ضلع قاعدته، أي أن أحرفه الستة متساوية الطول.

أو هو هرم ثلاثي أوجهه الأربعة سطوح مثلثات متساوية الأضلاع.

إذا كان ل، ع، عَ هي على الترتيب أطوال حرف وارتفاع والارتفاع الجانبي لهرم ثلاثي منتظم، فإن:

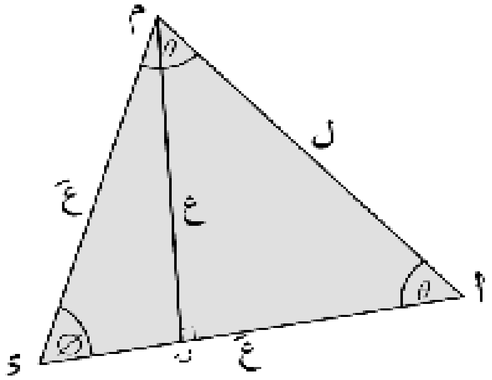


(١) $٢\,ل^{٢} = ٣\,ع^{٢}$ (٢) $٣\,ل^{٢} = ٤\,عَ^{٢}$

(٣) $٨\,عَ^{٢} = ٩\,ع^{٢}$

(٤) مساحته الكلية $= ل^{٢}\sqrt{٣}$

(٥) حجمه $= \frac{\sqrt{٣}}{١٢}\,ل^{٢}\,ع$



(٦) قياس الزاوية الزوجية بين أي وجهين من أوجهه هو مقدار ثابت ويساوي $\emptyset$

حيث: $جا\emptyset = \frac{ع}{عَ} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

$\therefore \emptyset = ٧٠^{\circ}\ ٣١'\ ٤٣,٦١''$.

(٧) قياس زاوية ميل أي حرف على قاعدة الهرم الثلاثي المنتظم هو مقدار ثابت ويساوي θ حيث: $جا\theta = \frac{ع}{ل} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

$\therefore \theta = ٥٤^{\circ}\ ٤٤'\ ٨,٢''$.

لإثبات أن .. ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة في الفراغ:

* أثبت أن النقط الثلاث تقع في مستويين مختلفين ... وبالتالي فإنها تنتمي إلي خط تقاطع المستويين.

لإثبات أن .. مستقيم يوازي آخر في الفراغ: أثبت إحدى الحالات الآتية:

* المستقيان غير متقاطعين ويقعان في مستوى واحد. (تعريف المستقيمين المتوازيين)
* كلاهما يوازي مستقيمًا ثالثاً في الفراغ. (حقيقة)
* يقعان في مستوى واحد، وأحدهما يوازي مستوى يحتوي الآخر. (نظرية ١)
* كلاهما خط تقاطع مستوى لمستويين متوازيين. (نتيجة- نظرية ١)
* أحدهما يوازي مستويين متقاطعين والآخر هو خط تقاطع المستويين. (نتيجة- نظرية ١)
* المستقيان يحملان ضلعين متقابلين في متوازي أضلاع.
* المستقيان عمودان على مستقيم ثالث ويقعان في مستوى واحد.
* المستقيان عمودان على مستوى واحد.

لإثبات أن .. مستقيم يوازي مستوى في الفراغ:

* أثبت أن المستقيم يوازي أحد المستقيات داخل المستوى. (حقيقة-نظرية ١)

لإثبات أن .. مستويين متوازيان في الفراغ: أثبت إحدى الحالتين التاليتين:

* أحدهما يحتوي على مستقيمين متقاطعين يوازيان مستقيمين متقاطعين في المستوى الآخر.
* كلاهما عمودي على مستقيم واحد.

لإثبات أن .. مستقيم عمودي على مستوى في الفراغ: أثبت إحدى الحالات التالية:

* المستقيم عمودي على مستقيمين غير متوازيين في المستوى. (نظرية ٣- نتيجة ١)
* المستقيم يقع في مستوى آخر عمودي على المستوى الأول، والمستقيم عمودي على خط تقاطع المستويين. (نظرية ٦)
* المستقيم هو خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى الأول.
* المستقيم هو الثالث للمائل ومسقطه، والمستوى هو مستوى الإسقاط. (نظرية ٤ وعكسها)

لإثبات أن .. مستقيمين متعامدان: أثبت إحدى الحالات التالية:

إذا كان المستقيان متخالفين:

* أحد المستقيمين عموديا على مستوى يحتوي المستقيم الآخر. (نتائج وتعريفات نظرية ٣)
* أحد المستقيمين يوازي مستقيم عمودي على الآخر.

إذا كان المستقيمان يقعان في مستوى واحد:

* أحد المستقيمين هو الثالث للمائل ومسقطه، والمستقيم الآخر هو المسقط أو المائل. (نظرية ٤ وعكسها)

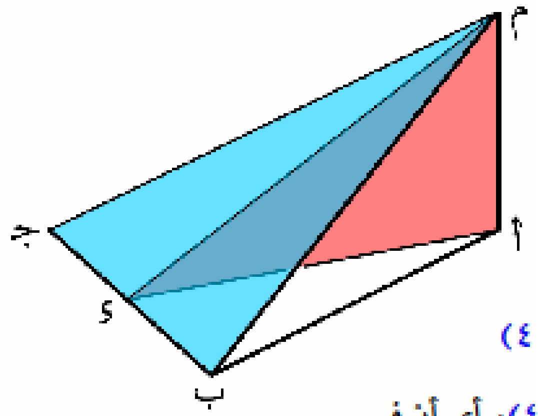
* المستقيمان يحملان ضلعي القائمة في مثلث قائم. (عكس فيثاغورث)

* ابحث حالات تعامد مستقيمين في الهندسة المستوية.

لإثبات .. تعامد مستويين في الفراغ ... أثبت إحدى الحالتين التاليتين:

* قياس إحدى زواياهما الزوجية قائمة.

* أحد المستويين يحتوي مستقيم عمودي على المستوى الآخر. (نظرية ٥)



** ملاحظات:

إذا كان: $\overline{\text{أم}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ فإن: $\overleftrightarrow{\text{مء}}$ مائل على المستوى أ ب جـ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ مسقط $\overleftrightarrow{\text{مء}}$ على المستوى أ ب جـ، فإذا كان:

١) $\overleftrightarrow{\text{مء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فإن: $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ (نظرية ٤)

٢) $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فإن: $\overleftrightarrow{\text{مء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ (عكس نظرية ٤)، أي أن في كل من الحالتين السابقتين يكون كل من $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{مء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، وبالتالي ينتج أن:

١) م $\hat{\text{ء}}$ أ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ، ويكون:

ظا(م $\hat{\text{ء}}$ أ) = $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ء}}$ ، جتا(م $\hat{\text{ء}}$ أ) = $\frac{\text{أ ء}}{\text{م ء}}$ ، جا(م $\hat{\text{ء}}$ أ) = $\frac{\text{م أ}}{\text{م ء}}$

٢) $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوى م أ ء، وعليه ينتج أن:

أ) المستوى م ب جـ ⊥ المستوى م أ ء، لأن المستوى م ب جـ يحتوي على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

ب) المستوى أ ب جـ ⊥ المستوى م أ ء، لأن المستوى أ ب جـ يحتوي على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

٣) ∵ $\overline{\text{أم}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ كل من المستويات م أ ب ، م أ جـ ، م أ ء ⊥ المستوى أ ب جـ.

تذكر دائماً أن المائل ومسقطه يعينان الزاوية المستوية للزاوية الزوجية التي تحتويها.

الاسئلة الموضوعية (سؤال إختيارى)

السؤال الأول : إختر الاجابة الصحيحة من الاجابات المعطاه .

(١) اذا كان $س + ت ص = \frac{١ - ٢ت}{٢ + ت}$ فإن $س + ص = ...$

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢) اذا كان ١ ، ω ، ω² هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . فإن $(١ + ω + ωت)(١ + ω - ωت) = ...$

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ١ (د) −١

(٣) اذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ٣٦$ ، فإن $ن = ...$

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) ٧

(٤) هرم ثلاثي منتظم طول حرفه ٣سم ، فإن طول ارتفاعه يساوي ......سم

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) $\sqrt{٦}$

(٥) مكعب مجموع اطوال اقطاره يساوي ١٢سم ، فإن مساحة وجهه تساوي ......سم²

(أ) ٣ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤٨ (د) ٩

(٦) اذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه ....

(أ) عمودي علي خط تقاطعهما (ب) يوازي خط تقاطعهما (جـ) عمودي علي كل منهما (د) ينصف الزاوية بينهما

إجابة السؤال الأول

(١) −١ (٢) −١

(٣) ٩ (٤) $\sqrt{٦}$

(٥) ٣ (٦) يوازى خط تقاطعهما

السؤال الثانى : أكمل ما يأتى .

(أ) إذا كان $^{ن}ل_{ن-١} = ٨$ فإن $ن = $ ....

(ب) الصورة الأسية للعدد المركب $١ + \sqrt{٣}$ ت هى ....

(د) قطر متوازى السطوح هو قطعة مستقيمة تصل بين ....

(ى) فى المكعب أ ب جـ ى أَ بَ جَ ىَ قياس الزاوية بين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جَ ىَ}$ يساوى ....°

(هـ) طول قطر متوازى المستطيلات الذى أبعاده : ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ سم يساوى .... سم .

(و) الهرم الثلاثى المنتظم الذى طول حرفه ٣٠ سم يكون ارتفاعه مساوياً .... سم .

إجابة السؤال الثانى

(أ) $^{ن}ل_{ن-١} = {}^{ن}ل_{١} = ٨$ $\quad ن = ٨$

(ب) جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\quad \theta = ٦٠°$

(جـ) رأسيين وليسا فى وجه واحد

(د) ٤٥°

(هـ) قطر $= \sqrt{١٠^٢ + ٢٠^٢ + ٣٠^٢} = ١٠\sqrt{٥}$ سم

(و) $ع^٢ = \frac{٢}{٣} \times ٣٠^٢ = ٦٠٠$ $\quad ع = ١٠\sqrt{٦}$ سم

السؤال الثالث : أكمل ما يأتى .

(١) $^{س+١}ل_{س-١} = ٢١$ فإن س = ...

(٢) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٠ & جا٣س & ٥ \\ ٠ & ٠ & جتا٣س \end{vmatrix} = $ جـ ....

(٣) $(٢ ت^٤ - \frac{٢ ت^٢}{\omega^٢} + ٣ \omega^٢)^٢ + (\frac{٥}{\omega^٢} + ٦ \omega^٤ + ٥ \omega^٢)^٢ = $ ....

(٤) جميع المستقيمات الرأسية ....

منتدى توجيه الرياضيات أ/عادل ادوار

(٥) إذا كان المستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$ متخالفين فإن ل$_١ \cap$ ل$_٢$ = ...

(٦) أقل عدد من المستويات تحدد مجسمًا يساوى ....

إجابة السؤال الثالث

(١) ٦ (٢) ٦س (٣) ـ ١

(٤) متوازية (٥) $\varnothing$ (٦) ٤

السؤال الرابع : إختر الإجابة الصحيحة من الاجابات المعطاه .

(أ) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك (أ + ب)^{ن} هو ع$_٧$ فإن ن = ...

[١٢ ، أ ١٣ ، أ ١٤ ، أ ١٥]

(ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ٢ & \text{صفر} \end{vmatrix}$ = ... [صفر أ ، ـ ١٢ أ ، ـ ٢٤ أ ، ٢٤]

(جـ) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسم يساوى .... مستويات .

[٣ ، أ ٤ ، أ ٥ ، أ ٦]

(ء) إذا كان طول قطر مكعب $٥\sqrt{٣}$ سم فإن مساحة سطحه = ... سم^٢ .

[٢٥ ، أ ١٢٥ ، أ ١٥٠ ، أ ٢٢٥]

(هـ) إذا وازى مستقيم كلاً من مستويين متقاطعين فإنه ....

[عمودى على خط تقاطعهما أ، يوازى خط تقاطعهما أ، عمودى على كل منهما أ، ينصف الزاوية بينهما]

(و) أ ب جـ ء مستطيل ، إذا رسم $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ مستوى المستطيل فإن مسقط $\overline{\text{جـ هـ}}$ فى مستوى المستطيل هو ....

[$\overline{\text{أب}}$ ، أ $\overline{\text{جـ أ}}$ ، أ $\overline{\text{أء}}$ ، أ نقطة أ]

إجابة السؤال الرابع

(أ) ١٣ (ب) ٢٤

(جـ) ٤ (ء) ١٥٠

(هـ) يوازى خط تقاطعهما (و) $\overline{\text{جـ أ}}$

السؤال الخامس : أكمل ما يأتى .

(١) $\frac{٧+٤\omega}{٧\omega^{٢}+٤}+\frac{٥-٣\omega^{٢}}{٥\omega-٣}=$ ....

(٢) اذا كان $^{ن-٤}ل_{ر} \times {}^{ن-١}ق_{ر} = ١$ فان $\lfloor ن-ر =$ ....

(٣) اذا رسم مستقيم مائل علي مستو وكان عموديا علي مستقيم في المستوي فان مسقط المستقيم المائل علي المستوي يكون ....

(٤) مكعب طول قطره ٦ سم فان طول حرفه يساوي ....

(٥) اذا كان مستقيم عموديا علي مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما فإنه يكون ....

(٦) اذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست علي استقامة واحدة فانهما يكونان ....

إجابة السؤال الخامس

(١) -١

(٢) ١٢٠ أو ٢٤

(٣) عموديا علي هذا المستقيم

(٤) $٢\sqrt{٣}$

(٥) عموديا علي مستويهما

(٦) منطبقان

السؤال السادس : أكمل ما يأتى .

(١) إذا كان أ ، ب ، حـ $\in$ ع فإن $\frac{أ+ب\omega+حـ\omega^{٢}}{ب+حـ\omega+أ\omega^{٢}}=$ ....

(٢) إذا كان $^{٢٠}ق_{ر} = {}^{٢٠}ق_{ر+٤}$ ، $^{ن}ل_{ر-٥} = ٧٢٠$ فإن ن+ر = ...

(٣) إذا كان $\frac{\lfloor ن+٨}{\lfloor ن+٥} = ٥٠٤$ فإن ن = ...

(٤) لإذا وازى مستقيم كلاً من مستويين متقاطعين فإنه ....

(٥) إذا كان طول قطر مكعب يساوى $٥\sqrt{٣}$ سم فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(٦) إذا تعامد مستويان ورسم في أحداهما عمودى على خط التقاطع كان المستقيم .....

إجابة السؤال السادس

(١) ω

(٢) ١٨

(٣) ١

(٤) يوازى خط تقاطعهما

(٥) ١٥٠

(٦) عموديًا على المستوى الآخر

منتدى توجيه الرياضيات عادل ادوار

السؤال السابع : إختر الاجابة الصحيحة من الاجابات المعطاه .

(١) $^{15}ن_{4} + {}^{15}ن_{5} + {}^{16}ن_{6} =$ ....

(أ) $^{16}ن_{5}$ (ب) $^{16}ن_{6}$ (ج) $^{17}ن_{5}$ (د) $^{17}ن_{6}$

(٢) اذا كان ω هو احد جذور المعادلة $س^{3} = ١$ فان احد جذور المعادلة $(س - ١)^{3} = ١$ هو ....

(أ) ω (ب) $\omega - ١$ (ج) $\omega + ١$ (د) ١

(٣) المستقيمان اللذان لا يجمعهما مستو واحد يكونان ....

(أ) متوازيان (ب) متقاطعان (ج) متخالفان (د) متعامدان

(٤) هرم ثلاثي منتظم طول حرفه ٣سم ، فإن أرتفاعه يساوي ......سم

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) $\sqrt{٦}$

(٥) أ ب ج د أ' ب' ج' د' مكعب, فان قياس الزاوية الزوجية أ − $\overleftrightarrow{د د'}$ − ب يساوي ....

(أ) °٩٠ (ب) °٣٠ (ج) °٤٥ (د) °٦٠

(٦) عدد المستويات التي تمر بمستقيم ونقطة لا تقع علي هذا المستقيم ....

(أ) مستوي واحد (ب) مستويان (ج) ثلاث مستويات (د) عدد لا نهائي

إجابة السؤال السابع

١) $^{17}ن_{6}$ (درجة)

٢) $\omega + ١$ (درجة)

٣) متخالفان (درجة)

٤) $\sqrt{٦}$ (درجة)

٥) °٤٥ (درجة)

٦) مستوي واحد (درجة)

منتدى توجيه الرياضيات أ/عادل إدوار

الاسئلة المقالية (ثلاث أسئلة أجبارية)

(١) أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}} = \frac{ن}{ر}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\frac{{}^{36}ق_{12}}{{}^{35}ق_{11}}$

الحــل

$\because \; {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} = \frac{ن\,(ن-1)!}{ر\,(ر-1)!\,(ن-ر)!}$ (١)

، $ {}^{ن-1}ق_{ر-1} = \frac{(ن-1)!}{(ر-1)!\,(ن-ر)!}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج :

$\therefore \; \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}} = \frac{ن}{ر}$ ، $\frac{{}^{36}ق_{12}}{{}^{35}ق_{11}} = \frac{36}{12} = 3$

---

(١) باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية :

$3س + 2ص + ع = 3$ ، $س + ص + ع = 2$ ، $س - 3ص + ع = 6$

الحــل

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8$ ، $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -8$ ، $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 16$

$\therefore س = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1$ ، $\therefore ص = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{8} = -1$ ، $\therefore ع = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$

---

(٣) فى مفكوك $\left(س - \frac{2}{س^2}\right)^{12}$

أوجد (١) معامل الحد الأوسط (٢) قيمة الحد الخالى من س

الحــل

(١) رتبة الحد الأوسط $= \frac{12}{2} + 1 = 7$ $\therefore$ الحد الأوسط هو $ع_7$

$\therefore$ معامل الحد الأوسط = معامل $ع_7 = {}^{12}ق_{6}\,(2)^6 = 59136$

(٢) $ع_{ر+1} = {}^{12}ق_{ر}\left(\frac{2}{س^2}\right)^{ر}(س)^{12-ر} = {}^{12}ق_{ر}\,(2)^{ر} \times س^{12-3ر}$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع: ١٢ − ٣ر = ٠ ∴ ر = ٤

∴ قيمة الحد الخالي من س هو $ع_٥$ = $^{١٢}ق_٤ (٢)^٤$ = ٧٩٢٠

---

(٤) ضع العدد : $\frac{٢(٥ - ٣\sqrt{٣}ت)}{١ + ٢\sqrt{٣}ت}$ حيث $ت^٢ = -١$ على الصورة المثلثية

ثم أوجد جذرية التربيعين على الصورة الأسية ومثلهما على شكل أرجاند

الحـــل

$ع = \frac{٢(٥ - ٣\sqrt{٣}ت)}{١ + ٢\sqrt{٣}ت} \times \frac{١ - ٢\sqrt{٣}ت}{١ - ٢\sqrt{٣}ت} = -٢ - ٢\sqrt{٣}ت$

$|ع| = \sqrt{٤ + ١٢} = ٤$ ، جتا $θ = \frac{-١}{٢}$ ، جا $θ = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $θ =$

∴ ع = ٤ (جتا $\frac{٤ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٤ط}{٣}$) = ٤ $هـ^{\frac{٤ط}{٣}ت}$

∴ $\sqrt{ع}$ = ٢ $هـ^{\frac{\frac{٤ط}{٣} + ٢رط}{٢}ت}$ حيث: ر = ٠ ، ١

ر=٠ ∴ $\sqrt{ع} = ع_١$ = ٢ $هـ^{\frac{٢ط}{٣}ت}$ ، ر=١ ∴ $\sqrt{ع} = ع_٢$ = ٢ $هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت}$

---

(٥) بدون فك أوجد قيمة ك التي تجعل س أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} ك & ٢ & ٣ \\ س & ك-٢ & س+٣ \\ س+ك & س+١ & ٢ \end{vmatrix}$

الحـــل

∵ س أحد عوامل المحدد ∴ المحدد = صفر عندما س = ٠

∴ $\begin{vmatrix} ك & ٢ & ٣ \\ ٠ & ك-٢ & ٣ \\ ك & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر ← $ص_١ - ص_٣$ $\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ك-٢ & ٣ \\ ك & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر

← $ع_٢ - ع_١$ $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ك-٥ & ٣ \\ ك & -١ & ٢ \end{vmatrix}$ ∴ (ك−٥) × ك = ٠ ∴ ك=٥ أ، ك=٠

---

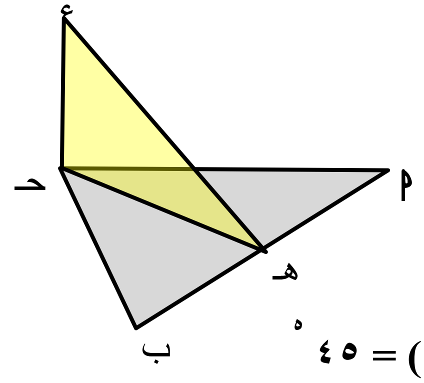
(٦) في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، ق(∠ جـ أ ب) = ٣٠° ، $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$

، جـ ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ أوجد ق(∠ هـ ء جـ)

الحـــل

∵ $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ مائل على المستوى أ ب جـ ، مسقطه هو $\overleftrightarrow{جـ هـ}$



، ∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

في Δ أ ب حـ :

ق(∠ حـ أ ب) = ٣٠° ، ق(∠ أ هـ حـ) = ٩٠°

∴ حـ هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ

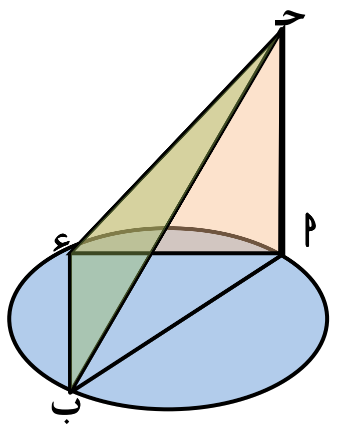
، ∵ حـ ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ ∴ حـ هـ = حـ ء

، ∵ ق(∠ ء هـ حـ) = ٩٠° ∴ ق(∠ هـ ء حـ) = ٤٥°

---

(٧) في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}} \perp$ مستوى الدائرة ، ء ∈ الدائرة

أثبت أن المستويين حـ ء أ ، حـ ء ب متعامدان



الحـل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة ∴ ق(∠ أ ء ب) = ٩٠°

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \perp$ أ ء ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}} \perp$ مستوى الدائرة

∴ أ حـ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ الواقع في مستوى الدائرة

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \perp$ كل من أ ء ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \perp$ المستوى أ حـ ء

∴ المستوى حـ ب ء المار بـ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}} \perp$ المستوى أ حـ ء ∴ المستويين حـ ء أ ، حـ ء ب متعامدان

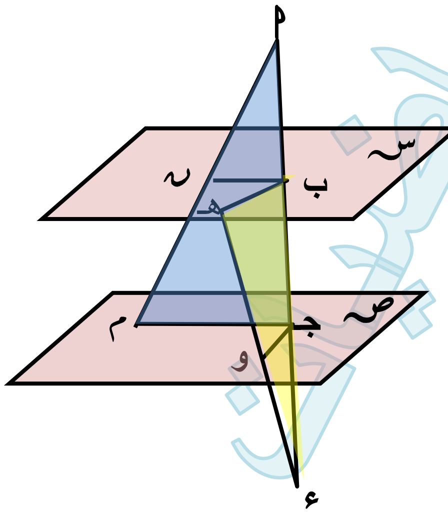
---

(٨) س ، ص مستويان متوازيان قطعهما أ ب في نقطتي ب ، حـ على الترتيب و كان :

أ ب : ب حـ : حـ ء = ٢ : ٣ : ٥ و رسم من أ مستقيم يقطع س ، ص في ن ، م على الترتيب

و رسم من ء مستقيم يقطع س ، ص في هـ ، و على الترتيب أثبت أن : $\frac{\text{ء حـ . حـ م}}{\text{ن ب . ب ء}} = \frac{٢٥}{١٦}$

الحـل



∵ س // ص ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ء}}$ قاطع لهما ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{حـ و}}$

في Δ ء ب هـ ∴ $\frac{\text{ء حـ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{حـ و}}{\text{هـ ب}} = \frac{٥}{٨}$ (١)

بالمثل $\overline{\text{ب ن}}$ // $\overline{\text{حـ م}}$

في Δ أ حـ م ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{حـ م}} = \frac{٢}{٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{\text{ء حـ}}{\text{ء ب}} \times \frac{\text{حـ م}}{\text{ب ن}} = \frac{٥}{٨} \times \frac{٥}{٢}$

∴ $\frac{\text{ء حـ} \times \text{حـ م}}{\text{ء ب} \times \text{ب ن}} = \frac{٢٥}{١٦}$

(٩) إذا كان : $\frac{|\underline{ن+٢}}{|\underline{ن}}$ + ٣ ن = ٤٧ ، $|\underline{ر}$ = ن فأوجد قيمة ن ق ر

الحـل

(ن + ٢) (ن + ١) × ٣ ن = ٧٤ ∴ ن^٢ + ٦ن − ٧٢ = ٠

∴ (ن + ١٢) (ن − ٦) = ٠ ∴ ن = ٦ ، ن = − ١٢ مرفوض

∵ $|\underline{ر}$ = ن = ٦ ∴ ر = ٣

∴ ن ق ر = ٦ ق ٣ = $\frac{٦ \times ٥ \times ٤}{|\underline{٣}}$ = ٢٠

---

(١٠) إذا كانت النسبة بين (٤ س^٢ + $\frac{١}{س^٢}$)^١٥ أوجد (١) قيمة الحدالخالى من س

(٢) قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين فى المفكوك متساويان

الحـــــل

ع_{ر+١} = ١٥ ق ر ($\frac{١}{س^٢}$)^ر (٤س^٢)^{١٥−ر} = ١٥ ق ر (٢)^{−ر} (س)^{−ر} × ٢^{٣٠−٢ر} × س^{٣٠−٢ر}

ولإيجاد الحد الخالي من س نضع ٣٠ ـ ٣ر = ٠ ∴ ر = ١٠

الحد الخالي من س هو ع_{١١} = ١٥ ق ١٠ = ١٥ ق ٥ = ٣٠٠٣

رتبا الحدين الأوسطين هما : $\frac{١٥+١}{٢}$ ، $\frac{١٥+٣}{٢}$ أى ع_٨ ، ع_٩

∴ ع_٨ = ع_٩ ∴ $\frac{ع_٩}{ع_٨}$ = ١ ∴ $\frac{١٥ - ٨ + ١}{٨} \times \frac{١}{٨ س^٣}$ = ١

٨ س^٣ = ١ ∴ س^٣ = $\frac{١}{٨}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

---

(١١) باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات الآتية :

٤ س + ٣ ص ـ ٥ ع = ٦ ، ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢

، ٥ س ـ ٢ ص ـ ٧ ع = ١

الحـل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{vmatrix} = ١٧٩ \qquad \Delta_١ = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & -٥ \\ ١٢ & ٢ & ٤ \\ ١ & -٢ & -٧ \end{vmatrix} = ٣٥٨$$

$$\Delta_٢ = \begin{vmatrix} ٤ & ٦ & -٥ \\ ٣ & ١٢ & ٤ \\ ٥ & ١ & -٧ \end{vmatrix} = ١٧٩ \qquad \Delta_٣ = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ١٢ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix} = ١٧٩$$

∴ س = $\frac{\Delta_١}{\Delta}$ = $\frac{٣٥٨}{١٧٩}$ = ٢ ، ص = $\frac{\Delta_٢}{\Delta}$ = $\frac{١٧٩}{١٧٩}$ = ١ ، ع = $\frac{\Delta_٣}{\Delta}$ = $\frac{١٧٩}{١٧٩}$ = ١

(١٢) حل المعادلة الآتية فى ك $(\text{٣س} - ٢)^{٦} - ٩\,(\text{٣س} - ٢)^{٣} + ٨ = \text{صفر}$

الحــل

$[(\text{٣س} - ٢)^{٣} - ١]\,[(\text{٣س} - ٢)^{٣} - ٨] = \text{صفر}$

$\therefore (\text{٣س} - ٢)^{٣} = ١$ ومنها $\text{س} = ١$ أ، $\text{٣س} - ٢ = \omega$ ومنها $\text{س} = \frac{٢ + \omega}{٣}$

أ، $(\text{٣س} - ٢) = \omega^{٢}$ منها $\text{س} = \frac{٢ + \omega^{٢}}{٣}$

أ، $\text{٣س} - ٢ = ٢$ ومنها $\text{س} = \frac{٤}{٣}$ أ، $\text{٣س} - ٢ = ٢\omega$ منها $\text{س} = \frac{٢ + ٢\omega}{٣}$

أ، $\text{٣س} - ٢ = ٢\omega^{٢}$ منها $\text{س} = \frac{٢ + ٢\omega^{٢}}{٣}$

---

(١٣) بدون فك المحدد أثبت

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^{٢} & \text{س}^{٣} \\ \text{ص} & \text{ص}^{٢} & \text{ص}^{٣} \\ \text{ع} & \text{ع}^{٢} & \text{ع}^{٣} \end{vmatrix} = \text{س ص ع}\,(\text{س} - \text{ص})(\text{ص} - \text{ع})(\text{ع} - \text{س})$$

الحــل

$$\text{س ص ع}\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ١ & \text{ص} & \text{ص}^{٢} \\ ١ & \text{ع} & \text{ع}^{٢} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ص}_٣ - \text{ص}_١]{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١} \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ١ & \text{ص} - \text{س} & \text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} \\ ١ & \text{ع} - \text{س} & \text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س ص ع}\,(\text{ص} - \text{س})(\text{ع} - \text{س}) \times \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ٠ & ١ & \text{ص} + \text{س} \\ ٠ & ١ & \text{ع} + \text{س} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ص}_٣ - \text{ص}_٢}$$

$$= \text{س ص ع}\,(\text{ص} - \text{س})(\text{ع} - \text{س}) \times \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س}^{٢} \\ ٠ & ١ & \text{ص} + \text{س} \\ ٠ & ٠ & \text{ع} - \text{ص} \end{vmatrix} = \text{س ص ع}\,(\text{ص} - \text{س})(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} - \text{ص})$$

---

(١٤) إذا كان: $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = ٢٠$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ١٢٠$ أوجد قيمة كل من: ن ، ر

الحــل

$\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$

$\therefore ٢٠ = \frac{١٢٠}{\text{ر}!}$

$\therefore \text{ر}! = ٦ = ٣ \times ٢ \times ١ = ٣!$ $\therefore \text{ر} = ٣$

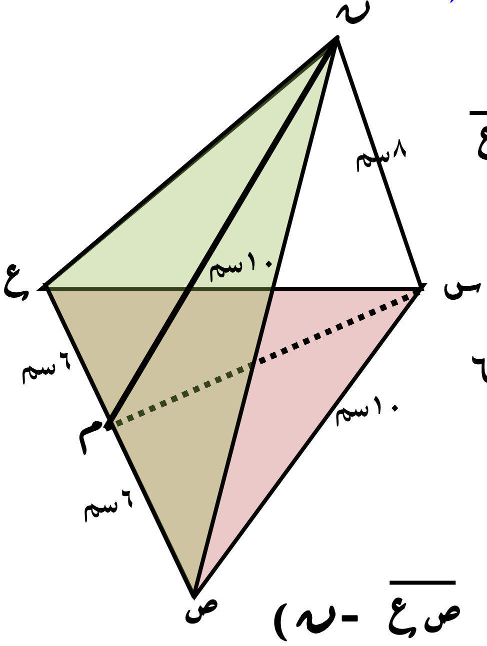
، $\because\ ^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ١٢٠$ $\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٦ \times ٥ \times ٤ = \ ^{٦}\text{ل}_{٣}$ $\therefore \text{ن} = ٦$

---

(١٥) س ص ع مثلث فيه س ص = س ع = ١٠ سم ، ص ع = ١٢ سم نصفت $\overline{\text{ص ع}}$ في م

ورسمت $\overline{\text{س ن}}$ عمودية على مستوى المثلث بحيث كان س ن = ٨ سم

(١) أثبت أن $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$ (٢) أوجد: ق (∠س - $\overline{\text{ص ع}}$ - ن)



الحل

∆ س ص ع   ∵ م منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ $\overline{\text{س م}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$

∵ $\overline{\text{س ن}}$ ⊥ المستوى س ص ع ، $\overline{\text{ن م}}$ مائل

∵ $\overline{\text{س م}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$

في ∆ س م ص القائم الزاوية في م   س ص = ١٠ ، ص م = ٦

∆ س م = $\sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2}$ = ٨ سم

∵ $\overline{\text{ص ع}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{س م}}$ ، $\overline{\text{ن م}}$

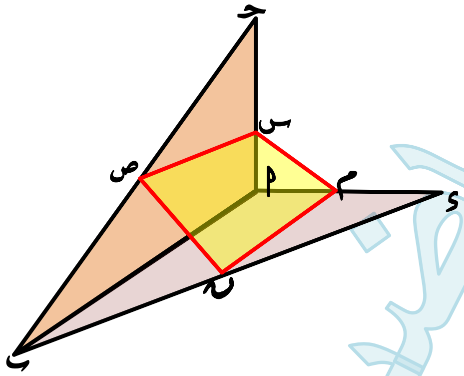
∴ ∠س م ن هي الزاوية المستوية الزوجية (∠س - $\overline{\text{ص ع}}$ - ن)

ظا ∠س م ن = $\frac{\text{س ن}}{\text{س م}} = \frac{٨}{٨} = ١$ ∴ ق (∠س م ن) = ٤٥°

---

(١٦) ∆ ا ب جـ ، ∆ ا ء ب قائما الزاوية عند ا وفي مستويين مختلفين . فغذا كانت س، ص ، ن ، م منتصفات $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ا ء}}$ على الترتيب

فأثبت أن : (١) $\overline{\text{م ن}}$ // المستوى جـ ا ب   (٢) الشكل س ص ن م مستطيل



الحل

∆ ا ب ء   م، ن منتصفي $\overline{\text{ا ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$ ،   م ن = $\frac{١}{٢}$ ا ب

∵ $\overline{\text{ا ب}}$ ⊂ المستوى جـ ا ب   ∴ $\overline{\text{م ن}}$ // المستوى جـ ا ب

∆ ا ب جـ   س، ص منتصفي $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

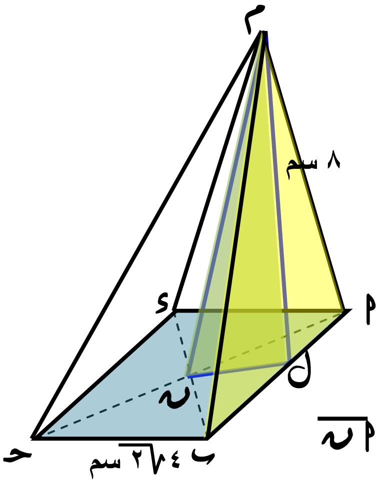
∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ا ب}}$ ،   س ص = $\frac{١}{٢}$ ا ب   ∴ م ن = س ص

∴ الشكل س ص ن م متوازي أضلاع $\overline{\text{ب ا}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ا ء}}$

سم ∴ $\overline{\text{ب ا}}$ ⊥ مستويهما   ∴ $\overline{\text{ا ب}}$ ⊥ $\overline{\text{س م}}$ ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{س م}}$ الشكل س ص ن م مستطيل

(١٧) م أ ب جـ د هرم رباعى قائم قاعدته أ ب جـ د مربع طول ضلعه $٤\sqrt{٢}$ وطول حرفه الجانبى = ٨ سم. أوجد (١) ارتفاع الهرم (٢) قياس زاوية ميل $\overline{م أ}$ على مستوى القاعدة ابجد

(٣) ظل الزاوية بين المستويين م أ ب ، أ ب جـ د



الحـــل

(١) ∵ الهرم قائم ، ن ملتقى قطرا القاعدة ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن أ}$

أ جـ = $\sqrt{(٤\sqrt{٢})^٢ + (٤\sqrt{٢})^٢}$ = ٨ سم ∴ أ ن = ٤ سم

Δ م أ ن فيه م ن = $\sqrt{(٨)^٢ - (٤)^٢}$ = $\sqrt{٤٨}$ = $٤\sqrt{٣}$ سم

(٢) زاوية ميل $\overline{م أ}$ على القاعدة هى الزاوية بين $\overline{م أ}$ ومسقطه على القاعدة $\overline{أ ن}$

∴ ∠ م أ ن فى Δ م ن أ القائم الزاوية فى ن

∴ ظا (∠ م أ ن) = $\frac{م ن}{أ ن} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$ ق(∠ م أ ن) = °٦٠

(٣) نرسم $\overline{م ل} \perp \overline{أ ب}$ فيكون $\overline{ن ل} \perp \overline{أ ب}$ ∴ ∠ م ل ن هي الزاوية بين المستويين

فى Δ م ل ن فيه $\overline{م ن}$ ارتفاع الهرم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن ل}$

∴ ظا (∠ م ل ن) = $\frac{م ن}{ل ن} = \frac{٤\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} = \sqrt{٦}$ هو ظل الزاوية بين المستويين م أ ب ، أ ب جـ د

---

(١٨) ضع كلاً من : $ع_١ = ٢ + ٢\sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢ = \sqrt{٣}$ + ت حيث: $ت^٢ = -١$

فى الصورة الأسية ومن ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $ع_١ ع_٢$

الحـــل

∵ $|ع_١| = \sqrt{٤ + ١٢} = ٤$ ∴ جتا $θ_١ = \frac{١}{٢}$ ، جا $θ_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $θ_١ = \frac{ط}{٣}$ $ع_١ = ٤ هـ^{\frac{ط ت}{٣}}$

∵ $|ع_٢| = \sqrt{٣ + ١} = ٢$ ∴ جتا $θ_٢ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا $θ_٢ = \frac{١}{٢}$

∴ $θ_٢ = \frac{ط}{٦}$ $ع_٢ = ٤ هـ^{\frac{ط ت}{٦}}$

∴ $ع_١ ع_٢ = ٨ هـ^{(\frac{ط}{٣} - \frac{ط}{٦})ت} = ٨ هـ^{\frac{ط ت}{٢}}$ ∴ $\sqrt[٣]{ع_١ ع_٢} = ٢ هـ^{(\frac{\frac{ط}{٢} + ٢ ر ط}{٣})}$

عند ر. ∴ $\sqrt[٣]{ع_١ ع_٢} = ٢ هـ^{\frac{ط ت}{٦}}$

عند $ر_١$ ∴ $\sqrt[٣]{ع_١ ع_٢} = ٢ هـ^{\frac{٥ ط ت}{٦}}$

عند $ر_٢$ ∴ $\sqrt[٣]{ع_١ ع_٢} = ٢ هـ^{\frac{٩ ط ت}{٦}}$

(١٩) بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص}+\text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & ٠ \\ \text{س} & ٠ & \text{ع} \end{vmatrix}$$

الحـــل

الأيمن $\xleftarrow{\text{ص}_١ - \text{ص}_٣}$ $\begin{vmatrix} -\text{ص} & \text{س}-\text{ع} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$ $\xleftarrow{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}$ $\begin{vmatrix} ٠ & ٢\text{س} & ٢\text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$

$= ٢\begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$ $\xleftarrow{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}$ $٢\begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & ٠ \\ \text{س}+\text{ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$ $\xleftarrow{\text{ص}_٣ - \text{ص}_٢}$ $٢\begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & ٠ \\ \text{س} & ٠ & \text{ع} \end{vmatrix}$

---

(٢٠) أثبت أن : $\left[\dfrac{١}{١+\omega\,\text{ت}} - \dfrac{\text{ت}+\omega}{١+\omega^٢\,\text{ت}}\right]^٨ = ١٦$

$\xleftarrow{\text{ص}_٣ - \text{ص}_٢}$

الحـــل

$$\left[\dfrac{١}{١+\omega\,\text{ت}} - \dfrac{\text{ت}+\omega}{١+\omega^٢\,\text{ت}}\right]^٨ = \left[\dfrac{١+\omega^٢\,\text{ت} - (\text{ت}+\omega)(١+\omega\,\text{ت})}{(١+\omega\,\text{ت})(١+\omega^٢\,\text{ت})}\right]^٨$$

$$= \left[\dfrac{١+\omega^٢\,\text{ت} - (\text{ت}+\omega-\omega+\omega^٢\,\text{ت})}{\omega^٢\,\text{ت}+\omega\,\text{ت}}\right]^٨ = \left[\dfrac{١-\text{ت}}{-\text{ت}}\right]^٨$$

$$= (\text{ت}+١)^٨ = [(\text{ت}+١)^٢]^٤ = (٢\text{ت})^٤ = ١٦$$

---

(٢١) فى مفكوك $\left(\text{س}^٣ + \dfrac{٥}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ إذا كان الحد السابع هو الحد الخالى من س فأوجد قيمة ن ومن ثم اوجد النسبة بين الحدين السادس والأوسط عندما س = ـ ٢

الحـــل

$\because$ $\text{ح}_٧ = {}^{\text{ن}}\text{ق}_٦\ \text{س}^{٣(\text{ن}-٦)} \left(\dfrac{٥}{\text{س}}\right)^٦ = {}^{\text{ن}}\text{ق}_٦\ (٥)^٦ \times \text{س}^{٣\text{ن}-١٨-٦}$

$\because$ $\text{ح}_٧$ خالى من س فإن $٣\text{ن} - ٢٤ = $ صفر $\therefore$ $\text{ن} = ٨$

الحد الأوسط هو $\text{ح}_٥ = {}^٨\text{ق}_٤\ \text{س}^{١٢} \left(\dfrac{٥}{\text{س}}\right)^٤ = {}^٨\text{ق}_٤\ (٥)^٤ \times \text{س}^٨$

، $\text{ح}_٦ = {}^٨\text{ق}_٥\ \text{س}^٩ \left(\dfrac{٥}{\text{س}}\right)^٥ = {}^٨\text{ق}_٥\ (٥)^٥ \times \text{س}^٤$

$$= \dfrac{{}^٨\text{ق}_٥\ (٥)^٥ \times \text{س}^٤}{{}^٨\text{ق}_٤\ (٥)^٤ \times \text{س}^٨} = \dfrac{{}^٨\text{ق}_٥}{{}^٨\text{ق}_٤} \times \dfrac{٥}{\text{س}^٤} = \dfrac{٨-٥+١}{٥} \times \dfrac{٥}{\text{س}^٤} = \dfrac{٤}{\text{س}^٤} = \dfrac{٤}{١٦} = \dfrac{١}{٤}$$

(٢٢) بدون فك المحدد أوجد قيمة :
$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ١٢ & ٢٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$$

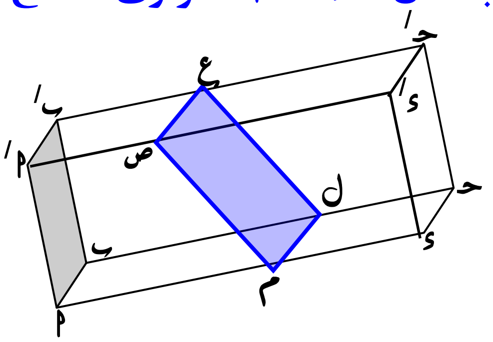
الحــل

$$٤\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - ٤\begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ٣ & ٥ & ٦ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ص}_١ \text{، ص}_٢]{\text{تبديل وضعى}} ٤\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} + ٤\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ -٢ & ١ & -٣ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$٤\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

---

(٢٣) أ ب حـ ء أ' ب' حـ' ء' م ∋ م وأ س ∴ س ط و ع ، قطعت أحرفه $\overline{\text{أء'}}$ ، $\overline{\text{ب'حـ'}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أء}}$ بالمستوى س فى النقط ص، ع، ل، م على الترتيب أثبت أن ص ع ل م متوازى أضلاع



الحــل ∵ المستوى س يقطع المستويين

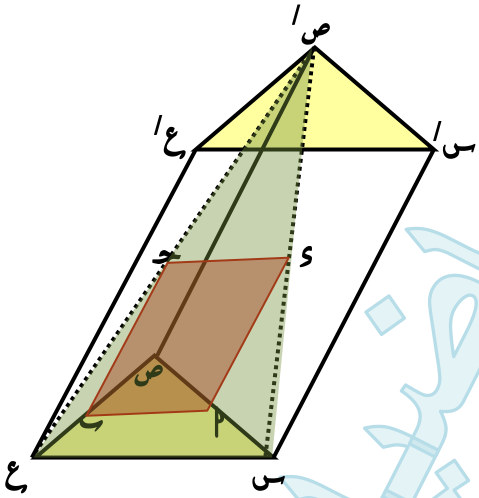
أ ب حـ ء ، أ' ب' حـ' ء' فى $\overline{\text{ل م}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$

∴ $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ وبالمثل $\overline{\text{م ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$

∴ الشكل ص ع ل م متوازى اضلاع

---

(٢٤) س ص ع س' ص' ع' منشور ثلاثى مائل أ، ب، حـ، ء منتصفات $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع ص'}}$ ، $\overline{\text{ص' س}}$ على الترتيب . برهن على أن الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع



الحــل

Δ س ص ع فيه $\overline{\text{أ ب}}$ بين منتصفى س ص ، ص ع

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{س ع}}$ ، أ ب = $\frac{١}{٢}$ س ع

وبالمثل $\overline{\text{ء حـ}}$ // $\overline{\text{س ع}}$ ، ء حـ = $\frac{١}{٢}$ س ع

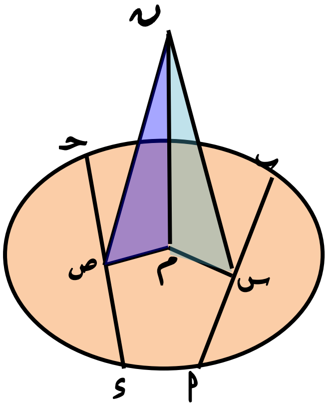
∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ويساويه فى الطول

∴ الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع

---

(٢٥) $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران متساويان فى الطول فى دائرة مركزها م ، س ∈ $\overline{\text{أب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{جـ د}}$

رسمت $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوى الدائرة فإذا كان $\overline{\text{ن س}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ أثبت أن ن س = ن ص



الحــل

∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوى الدئرة ، $\overline{\text{ن س}}$ مائل ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$

، $\overline{\text{ن ص}}$ مائل ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ ∴ $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$

∵ أب = جـ د ∴ م س = م ص

بتطابق ΔΔ ن س م ، ن ص م ينتج أن

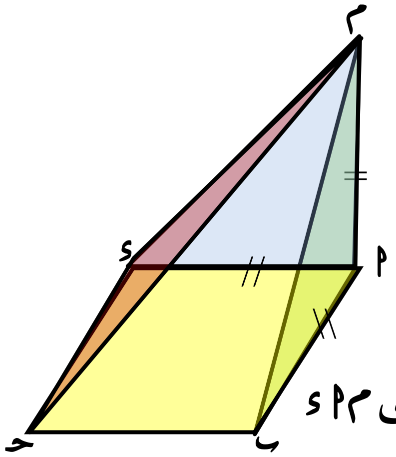
ن س = ن ص

---

(٢٦) أ ب جـ د مربع رسم $\overline{\text{أ م}}$ عمودى على كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أد}}$ بحيث $\overline{\text{أم}}$ = $\overline{\text{أد}}$

(١) أثبت أن * $\overline{\text{د جـ}}$ ⊥ المستوى أ م د ** المستوى م أ ب ⊥ المستوى م أ د

(٢) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م د جـ ، أ ب جـ د



الحــل

(١) ∵ $\overline{\text{أم}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أد}}$ ∴ $\overline{\text{أم}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د

∴ $\overline{\text{د جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{م أ}}$

∵ $\overline{\text{د جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أد}}$ ∴ $\overline{\text{د جـ}}$ ⊥ المستوى م أ د

∵ $\overline{\text{د جـ}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ∴ $\overline{\text{أب}}$ ⊥ المستوى م أ د

∵ $\overline{\text{أب}}$ ⊂ المستوى م أ د ∴ المستوى م أ ب ⊥ المستوى م أ د

(٢) ∵ $\overline{\text{م أ}}$ = $\overline{\text{أد}}$ ، $\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{د جـ}}$

∴ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م د جـ ، أ ب جـ د = ٤٥°

أنتهت المراجعة

مع كل تمنياتى لكم بالنجاح والتفوق

مع تحيات أسرة توجيه الرياضيات